Reg. No. : ....

Code No. : 30574 B   Sub. Code : SMMA 51

B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION,
NOVEMBER 2020.

Fifth Semester

Mathematics – Core

ABSTRACT ALGEBRA – II

(For those who joined in July 2017 onwards)

Time : Three hours   Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 1 = 10 marks)

Answer ALL questions.

Choose the correct answer :

1. ஒரு வெக்டர் வெளி V–யில் கீழ்க்கண்டவற்றுள் எது சரியானது அல்ல?

   (அ) $\alpha.0 = 0 \ \forall \ \alpha \ \varepsilon \ F$

   (ஆ) $0.v = 0 \ \forall \ v \ \varepsilon \ v$

   (இ) $\alpha.(uv)=(\alpha \ u)v$

   (ஈ) $\alpha \ (u + v) = \alpha \ u + \alpha \ v$

Which one of the following is not true in a vector space V

(a) $\alpha.0 = 0 \ \forall \ \alpha \ \varepsilon \ F$

(b) $0.v = 0 \ \forall \ v \ \varepsilon \ v$

(c) $\alpha.(uv) = (\alpha \ w) \ v$

(d) $\alpha \ (u + v) = \alpha \ u + \alpha \ v$

2. ஒரு வெக்டர் வெளியில், வெக்டர்களின் கணம் கூட்டலைப் பொறுத்து ஒரு

(அ) கணம் (ஆ) வளையம்

(இ) குலம் (ஈ) அபீலியன் குலம்

In a vector space, the set of all vectors under addition is a

(a) field (b) ring

(c) group (d) abelian group

3. $\dim A = 4$, $\dim B = 3$ மற்றும் $\dim(A + B) = 6$ எனில் $\dim(A \cap B) = ?$

(அ) 1 (ஆ) 8

(இ) 4 (ஈ) 2

If $\dim A = 4$, $\dim B = 3$ and $\dim(A + B) = 6$ then $\dim(A \cap B) = ?$

(a) 1 (b) 8

(c) 4 (d) 2

4. V எனும் வெக்டர் வெளிக்கு A மற்றும் B என்பன ஏதேனும் இரு உள்வெளிகள் எனில்

(அ) $\dim A + \dim B \le \dim V$

(ஆ) $\dim(A + B) \le \dim V$

(இ) $\dim A + \dim B \ge \dim V$

(ஈ) $\dim A + \dim B = \dim V$

If A and B are any two subspaces of a vector space V then

(a) $\dim A + \dim B \le \dim V$

(b) $\dim(A + B) \le \dim V$

(c) $\dim A + \dim B \ge \dim V$

(d) $\dim A + \dim B = \dim V$

5. $T : V \to W$ என்பது ஒரு படி நிலைமாற்றம் எனில்

(அ) $\dim V \le \dim T(V)$

(ஆ) $\dim V = \dim T(V)$

(இ) $\dim V \ge \dim T(V)$

(ஈ) இவை ஏதுமில்லை

If $T : V \to W$ is a linear transformation then

(a) $\dim V \leq \dim T(V)$

(b) $\dim V = \dim T(V)$

(c) $\dim V \geq \dim T(V)$

(d) None of these

6. $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$ மற்றும் $f(t) = t - 2$ எனில்

$\|f\| = ?$

(அ) $\sqrt{\frac{7}{3}}$ (ஆ) $\frac{3}{7}$

(இ) $\frac{7}{3}$ (ஈ) $\frac{4}{\sqrt{3}}$

If $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$ and $f(t) = t - 2$ then

$\|f\| = ?$

(a) $\sqrt{\frac{7}{3}}$ (b) $\frac{3}{7}$

(c) $\frac{7}{3}$ (d) $\frac{4}{\sqrt{3}}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரம் ——————

(அ) 1 (ஆ) 2

(இ) 3 (ஈ) 4

The rank of the matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ is

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 4

8. தலைகீழ் இருக்கக்கூடிய அணியை தேர்ந்தெடு

(அ) $\begin{pmatrix} 2 & 1.5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ (ஆ) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(இ) $\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ (ஈ) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Choose the matrix for which the inverse exists

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1.5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் சிறப்பியல்பு சமன்பாடு ————

(அ) $x^2 - 2x + 7 = 0$ (ஆ) $x^2 + 2x - 5 = 0$

(இ) $x^2 - 2x - 5 = 0$ (ஈ) $x^2 - 2x + 5 = 0$

The characteristics equation of the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ is ————

(a) $x^2 - 2x + 7 = 0$ (b) $x^2 + 2x - 5 = 0$

(c) $x^2 - 2x - 5 = 0$ (d) $x^2 - 2x + 5 = 0$

10. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் இருபடி வடிவம் ————

(அ) $x^2 + y^2$ (ஆ) $2xy$

(இ) $x^2 + 2xy$ (ஈ) $(x + y)^2$

The quadratic form of the matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ is ____________

(a) $x^2 + y^2$ (b) $2xy$

(c) $x^2 + 2xy$ (d) $(x + y)^2$

PART B — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

11. (அ) A, B என்பன வெக்டர் வெளி V–ன் உள்வெளிகள் எனில் $A \cap B$–யும் V ன் உள்வெளி என நிறுவுக. $A \cup B$ என்பது V ன் உள்வெளியா?

If A and B are subspaces of a vector space V then prove that $A \cap B$ is also a subspace of V. In $A \cup B$ a subspace of V?

Or

(ஆ) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ என்பது $T(a,b) = (2a - 3b,\ a + 4b)$ என்று வரையறுக்கப்பட்டல் T ஒரு நேரியல் உருமாற்றமா என சோதிக்க.

If $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ defined by $T(a,b) = (2a - 3b,\ a + 4b)$ then verify whether T is a linear transformation or not.

12. (அ) $S = \{(2, -3, 1), (0, 1, 2), (1, 1, 2)\}$ எனும் கணம் $V_3(\mathbb{R})$ ன் ஒரு அடிக்கணம் என நிறுவுக.

Prove that $S = \{(2, -3, 1), (0, 1, 2), (1, 1, 2)\}$ is a basis for $V_3(\mathbb{R})$.

Or

(ஆ) V என்பது F என்ற களத்தின் மீது அமைந்த முடிவுறு பரிமாணமுள்ள வெக்டர் வெளி என்க. V இன் ஒரு உள்வெளி A எனில் $V = A \oplus B$ என்றவாறு B எனும் ஓர் உள்வெளி இருக்கும் என நிரூபி.

Let V be a finite dimensional vector space over a field F and A be a subspace of V. Prove that there exists a subspace B of V such that $V = A \oplus B$.

13. (அ) ஒரு உட்பெருக்கல் வெளியில் உள்ள பூச்சியமற்ற செங்குத்து வெக்டர்களின் கணம் ஒரு படிச் சாராதது என நிறுவுக.

Prove that an orthogonal set of non-zero vectors in an inner product space is linearly independent.

Or

(ஆ) $V_3(\mathbb{R})$– ல் திட்டமான அடிக்கணம் $\{e_1, e_2, e_3\}$ ஐப் பொறுத்து $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ என்ற அணி உருவாக்கும் நேரியல் உருமாற்றத்தைக் காண்க.

Find the linear transformation determined by the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ with respect to the standard basis $\{e_1, e_2, e_3\}$ in $V_3(\mathbb{R})$.

14. (அ) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ என்ற அணிக்கு கெய்லி–ஹேமில்டன் தேற்றத்தை சரிபார்.

Verify Cayley-Hamilton theorem for the matrix $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Or

(ஆ) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் தரத்தைக் காண்க.

Find the rank of the matrix $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

15. (அ) ஓர் ஹெர்மீஷியன் அணியின் சிறப்பியல்பு மூலங்கள் மெய்யானவை என நிரூபி.

Prove that the characteristic roots of a Hermitian matrix are real.

Or

(ஆ) $V_2(\mathbb{R})$–ல் இருமாறி நேரியல் அமைப்பு f என்பது $f(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1$ என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. இங்கு $x = (x_1x_2)$; $y = (y_1, y_2)$ என்க. $\{e_1, e_2\}$ என்ற திட்ட அடிக்கணத்தை பொறுத்து f-க்குரிய அணியினைக் காண்க.

Find the matrix of the bilinear form $f(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1$ with respect to the standard basis in $V_2(\mathbb{R})$.

PART C — (5 × 8 = 40 marks)

Answer ALL questions, choosing either (a) or (b).

16. (அ) $\mathbb{R}^n$ என்பது $\mathbb{R}$–ன் மீது அமைந்த ஓர் வெக்டர் வெளி என நிறுவுக.

Prove that $\mathbb{R}^n$ is a vector space over $\mathbb{R}$.

Or

(ஆ) A மற்றும் B என்பவை F என்ற களத்தின் மீது அமைந்த வெக்டர் வெளி V ன் இரு உள்வெளிகள் எனில் $\dfrac{A+B}{A} \cong \dfrac{B}{A \cap B}$ என நிரூபி.

If A and B are two subspaces of a vector space V over a field F then prove that $\dfrac{A+B}{A} \cong \dfrac{B}{A \cap B}$.

17. (அ) (i) வெக்டர்வெளி V–யில் ஒரு படி சாராத கணத்தின் எந்த ஒரு உட்கணமும் ஒரு படி சாராதது என நிறுவுக.

(ii) F என்ற களத்தின் மீது அமைந்த வெக்டர் வெளி V என்க. மேலும் $S, T \le V$ எனில் $L(S \cup T) = L(S) + L(T)$ என நிரூபி.

(i) Prove that any subset of a linearly independent set in a vector space V is linearly independent.

(ii) Let V be a vector space over a field F. Let $S, T \leq V$. Prove that $L(S \cup T) = L(S) + L(T)$.

Or

(ஆ) V என்பது F என்ற களத்தின் மீது அமைந்த முடிவுறு பரிமாணம் உடைய வெக்டர் வெளி என்க. V யின் உள்வெளி W எனில்

$\dim(V / W) = \dim V - \dim W$ என காண்பி.

Let V be a finite dimensional vector space over a field F. If W is a subspace of V then show that $\dim(V / W) = \dim V - \dim W$.

18. (அ) ஒவ்வொரு முடிவுறு பரிமாணம் கொண்ட உட்பெருக்கல் வெளிக்கும் ஓரலகு–செங்குத்து அடிக்கணம் உண்டு என நிறுவுக.

Prove that every finite dimensional inner product space has an ortho-normal basis.

Or

(ஆ) களம் F –ன் மீதான வெக்டர் வெளிகள் V, W ஆகியவற்றின் பரிமாணங்கள் முறையே m, n எனில் $L(V, W)$ என்பது $m.n$ பரிமாணம் உள்ள F –ன் மீதான ஒரு வெக்டர் வெளி என காட்டுக.

If V and W are vector spaces of dimensions m, n respectively over F then show that $L(V, W)$ is a vector space of dimension $m.n$ over F.

19. (அ) கெய்லி–ஹேமில்டனின் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

State and prove Cayley-Hamilton theorem.

Or

(ஆ) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் தலைகீழ் அணியினை, ஆதார மாற்றங்கள் மூலம் காண்க.

Find the inverse of $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ by elementary transformation.

20. (அ) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -4 & 4 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் பான்மை மதிப்புகளையும் பான்மை வெக்டர்களையும் காண்க.

Find the eigen values and eigen vector of the matrix $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -4 & 4 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$.

Or

(ஆ) $2x_1x_2 - x_1x_3 + x_1x_4 - x_2x_3 + x_2x_4 - 2x_3x_4$ என்ற இருபடி வடிவத்தை மூலைவிட்ட வடிவத்திற்கு லக்ராஞ்சியன் முறையை பயன்படுத்தி சுருக்குக.

Reduce the quadratic form

$2x_1x_2 - x_1x_3 + x_1x_4 - x_2x_3 + x_2x_4 - 2x_3x_4$ to the diagonal form using Lagrange's method.